DISKRETNA MATEMATIKA
drugi kolokvij - 3. veljače 2025.

1. (12 bodova) Koliko ima $n \times n$ matrica s elementima iz skupa $\{-1, 1\}$ takvih da nijedan redak ni stupac matrice ne sadrži samo -1?

   Rješenje. Neka je S skup kvadratnih matrica reda n s elementima iz $\{-1, 1\}$, te za $i \in \{1, \ldots, n\}$, A_i skup matrica iz S kojima i-ti redak sadrži samo -1, a B_i skup matrica iz S kojima i-ti stupac sadrži samo -1. Tada je $|A_I \cap B_J| = 2^{(n-|I|)(n-|J|)}$. Iz formule uključivanja i isključivanja dobivamo da je traženi broj matrica

$$\left|\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\Big) \cap \Big(\bigcap_{j=1}^{n} B_j^c\Big)\right| = \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ J \subset \{1,\ldots,n\}}} (-1)^{|I|+|J|} |A_I \cap B_J|$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{i+j} \binom{n}{i} \binom{n}{j} 2^{(n-i)(n-j)}.$$

2. (12 bodova) Na koliko načina možemo podijeliti 40 bombona među 5 djece tako da nijedno dijete ne dobije više od četvrtine ukupnog broja bombona?

   Rješenje. Tražimo koeficijent uz x^{40} u funkciji izvodnici

$$(1 + x + \cdots + x^{10})^5 = \left(\frac{1 - x^{11}}{1 - x}\right)^5 = (1 - x^{11})^5 (1 - x)^{-5}$$
$$= \Big(\sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} (-x^{11})^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \binom{-5}{j} (-x)^j\Big)$$
$$= \Big(\binom{5}{0} - \binom{5}{1} x^{11} + \binom{5}{2} x^{22} - \binom{5}{3} x^{33} + \cdots\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+4}{j} x^j\Big),$$

   pa je traženi koeficijent

$$\binom{44}{40} - 5\binom{33}{29} + 10\binom{22}{18} - 10\binom{11}{7}.$$

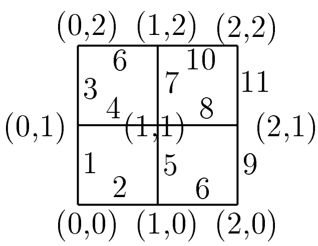
3. (14 bodova) U grafu $G = (V, E)$ sa skupom vrhova $V = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ postoji brid između vrhova (x_1, y_1) i (x_2, y_2) ako i samo ako je $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 1$.

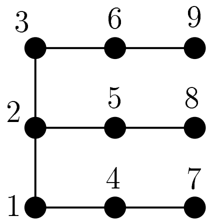
Težina brida između (x_1, y_1) i (x_2, y_2) je $2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2$. Koristeći Kruskalov ili Primov algoritam odredite neko razapinjuće stablo od G minimalne težine i navedite koja je njegova težina.

Ako vrh (x, y) označimo s $3x + y + 1$, odredite Prüferov kod dobivenog minimalnog razapinjućeg stabla.

Rješenje. Na lijevoj slici dolje prikazan je graf G i težine njegovih bridova. Kruskalovim ili Primovim algoritmom dobijemo razapinjuće stablo minimalne težine koja je jednaka $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 6 + 8 + 10 = 40$.

Na desnoj slici prikazano je dobiveno stablo zajedno s danim oznakama vrhova. Prüferov kod toga stabla je $(4, 1, 2, 5, 2, 3, 6)$.





4. (12 bodova) Komplement jednostavnog grafa G je graf koji ima sve iste vrhove i točno one bridove koji se ne nalaze u G.

(a) Dokažite da je stablu na n vrhova koje nema vrh stupnja $n - 1$ komplement uvijek povezan graf.

(b) Dokažite da je komplement planarnog grafa s 11 vrhova nužno neplanaran.

Sve odgovore obrazložite.

Rješenje.

(a) Neka je G stablo na n vrhova koje nema vrh stupnja $n - 1$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je komplement G^c nepovezan. Zbog pretpostavke na stupnjeve, nema izoliranih vrhova u G^c, pa uzmemo dva vrha u, v iz jedne komponente u G^c i dva vrha w, z iz druge komponente u G^c. Tada bridovi $\{u, w\}, \{u, z\}, \{v, w\}, \{v, z\}$ nisu u G^c, pa su u G. No, tako dobivamo u stablu G ciklus u, w, v, z, u, što nije moguće. Dakle, naša pretpostavka je bila kriva, odnosno G^c je povezan.

(b) Planarni graf s n vrhova ima najviše $3n - 6$ bridova (svako područje je stupnja barem 3, pa je $2|E| \geq 3|F|$ te iz $|F| = 2 - |V| + |E|$ slijedi tvrdnja).
Kad bi i G i G^c bili planarni, ukupni broj njihovih bridova koji je $\binom{n}{2}$ (jer G i G^c zajedno čine potpun graf), morao bi biti manji ili jednak $2(3n - 6)$. No, za $n = 11$ je $\binom{n}{2} = 55$, a $2(3n - 6) = 54$, pa $\binom{n}{2} \leq 2(3n - 6)$ ne vrijedi.